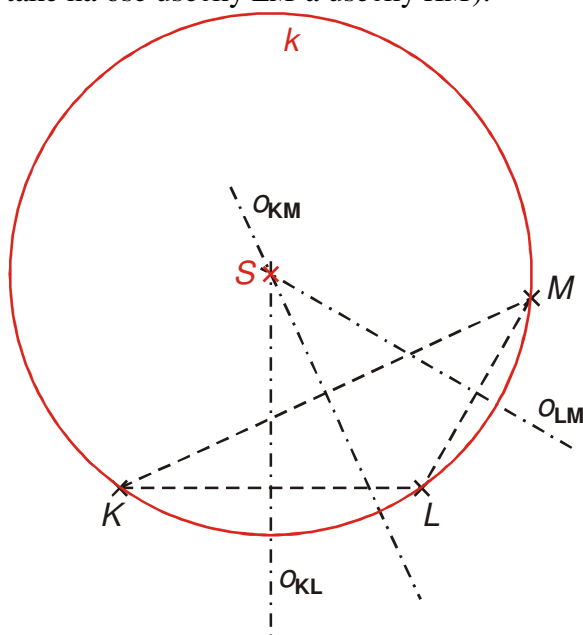


3.4.10 Konstrukce kružnic

Předpoklady: 3404

Př. 1: Jsou dány body K, L a M . Narýsuj všechny kružnice, které prochází těmito třemi body.

Kružnice - množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od středu kružnice \Rightarrow střed hledané kružnice musí mít stejnou vzdálenost od všech tří zadaných bodů \Rightarrow střed kružnice musí mít stejnou vzdálenost například od dvojice bodů $K, L \Rightarrow$ musí ležet na ose úsečky KL (podobně také na ose úsečky LM a úsečky KM).



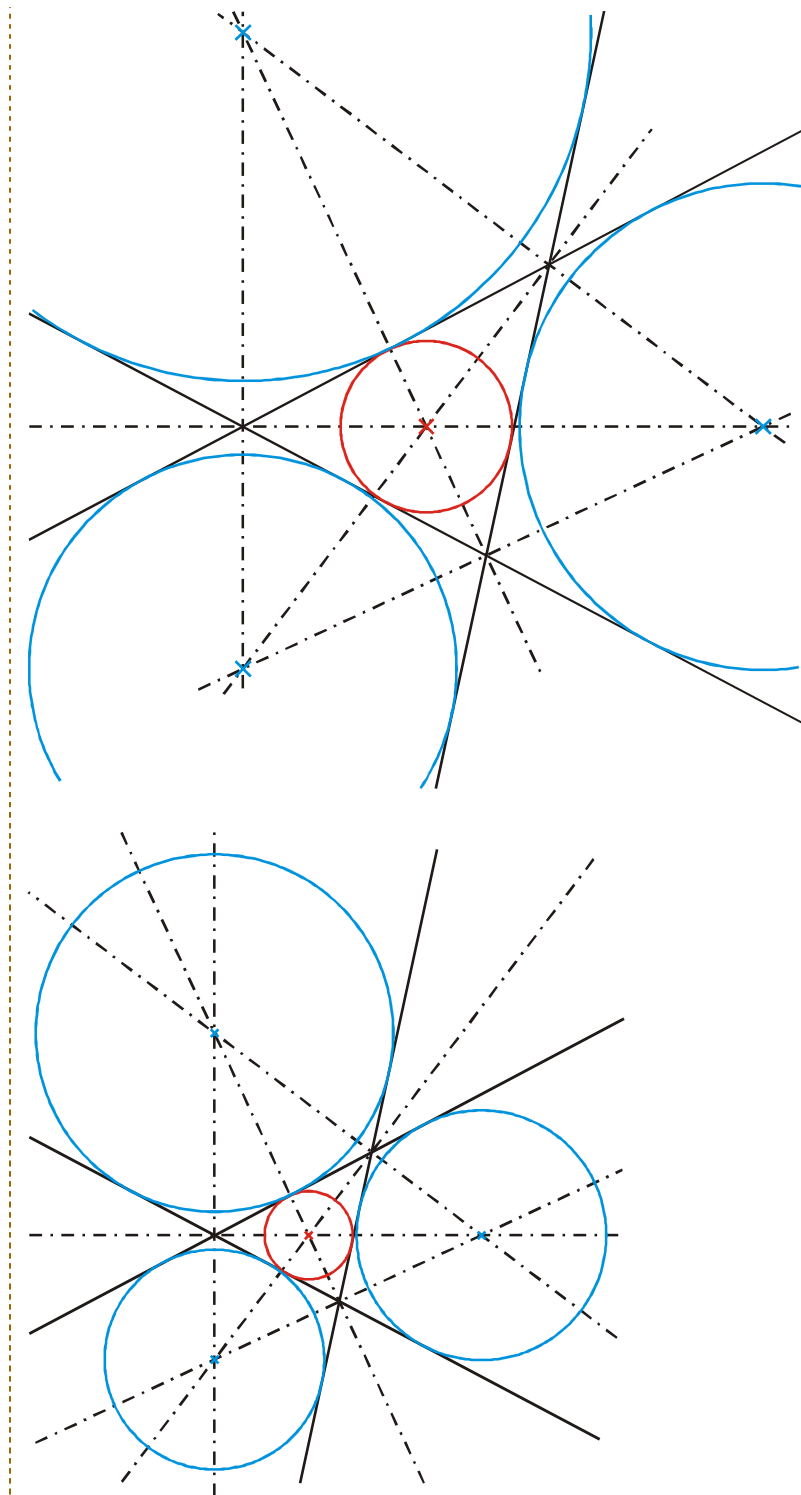
Pedagogická poznámka: Doporučuji žákům, aby udělali i třetí osu. Není samozřejmé, že se všechny tři osy protnou ve stejném bodě. Jde také o dobrou kontrolu přesnosti rýsování.

Př. 2: Jsou dány tři přímky p, q, r . Každé dvě z nich jsou navzájem různoběžné, všechny tři přímky nemají společný průsečík. Najdi všechny kružnice, které se dotýkají těchto tří přímek.

Tento příklad už známe – přímky p, q, r tvoří strany trojúhelníka a když hledáme kružnici, která se všech tří dotýká, hledáme kružnici trojúhelníku vepsanou (průsečík os úhlů).

Jiné zdůvodnění: Středů hledaných kružnic musí být od všech tří přímek stejně daleko \Rightarrow musí ležet na osách úhlů (osa úhlu je množinou všech bodů, která mají stejnou vzdálenost od obou ramen).

Protože hledané kružnice nemusí být uvnitř trojúhelníku, sestrojíme nejen osy vnitřních, ale i vnějších úhlů trojúhelníku.



Část nakreslených kružnic už známe:

- Kružnice procházející třemi body, je **kružnice opsaná trojúhelníku**, který je těmito body určen.
- Kružnice dotýkající se tří přímek a ležící uvnitř trojúhelníku, který tyto přímky ohraničují, je **kružnice vepsaná trojúhelníku**, který je těmito přímkami určen.
- Kružnice dotýkající se tří přímek a ležící vně trojúhelníku, který tyto přímky ohraničují, jsou **kružnice připsané trojúhelníku**, který je těmito přímkami určen.

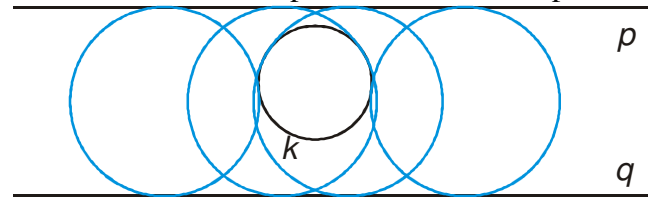
Pedagogická poznámka: Neříkáme si předem, že v předchozích příkladech jde konstrukci kružnice opsané (příklad 1) případně kružnice vepsané a kružnic připsaných (druhý příklad), řekneme si to až po vyřešení obou příkladů.

Pojmenování bodů v prvním příkladu je zvoleno schválně, aby žákům body neasociovaly vrcholy trojúhelníku.

Většina žáků odhadne v příkladu dva pouze kružnici vepsanou, na kružnice připsané přijde až, když se dozví, že jedna kružnice je málo.

Př. 3: Jsou dány dvě rovnoběžné přímky p, q a kružnice k , která leží uvnitř pásu, který ohraničují přímky p, q . Najdi všechny kružnice, které se dotýkají přímek p, q a kružnice k .

Náčrtek: Vzdálenost přímek označíme d , poloměr kružnice k označíme r .

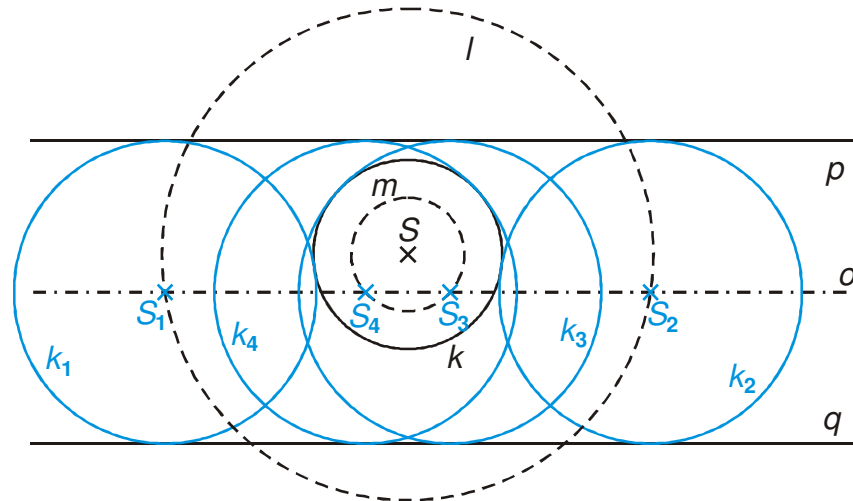


Příklad bude mít až čtyři řešení, určitě najdeme dvě kružnice s vnějším dotykem a ještě další dvě s vnitřním dotykem.

Hledáme střed modrých kružnic:

- Musí být stejně vzdálen od obou přímek \Rightarrow leží na ose pásu.
- Musí být od kružnice vzdálen stejně jako od obou přímek \Rightarrow musí být od kružnice vzdálen o polovinu vzdálenosti mezi přímkami \Rightarrow leží na kružnici se středem ve středu kružnice k a poloměru $r + \frac{d}{2}$ (kružnice s vnějším dotykem) nebo $\left| r - \frac{d}{2} \right|$ (kružnice s vnitřním dotykem).

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $p, q, k; p \parallel q, |pq| = d, k(S, r)$

2. o ; osa pásu přímek p, q

3. $l; l\left(S; r + \frac{d}{2}\right)$

4. $S_1, S_2; S_1 \cup S_2 = o \cap l$

$$5. k_1, k_2; k_1\left(S_1; \frac{d}{2}\right), k_2\left(S_2; \frac{d}{2}\right)$$

$$6. m; m\left(S; \left|r - \frac{d}{2}\right|\right)$$

$$7. S_3, S_4; S_3 \cup S_4 = o \cap m$$

$$8. k_3, k_4; k_3\left(S_3; \frac{d}{2}\right), k_4\left(S_4; \frac{d}{2}\right)$$

Rozbor: Úloha má vždy čtyři řešení.

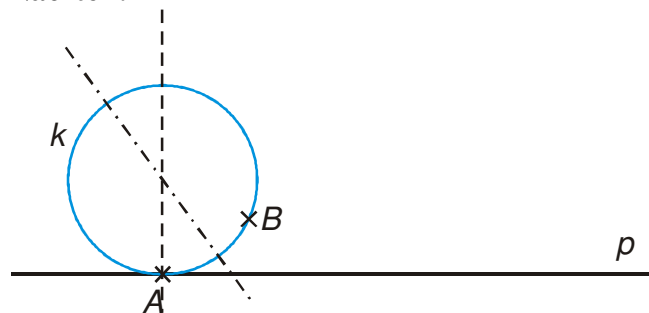
Kružnice, které jsme hledali, měly splňovat vždy tři ze tří typů podmínek:

- procházet bodem (podmínka typu B),
- dotýkat se přímky (podmínka typu p),
- dotýkat se kružnice (podmínka typu k).

Tyto úlohy se nazývají **Apollóniové**. Existuje celkem deset těchto úloh. My jsme si ukázali úlohu BBB (první příklad), úlohu ppp (druhý příklad) a jednu z možností úlohy ppk (třetí příklad). Řešení všech úloh (snadno k nalezení na internetu) přesahuje naše možnosti.

Př. 4: Je dána přímka p na ní bod A a mimo ni bod B . Najdi všechny kružnice, které procházejí body A, B a dotýkají se přímky p .

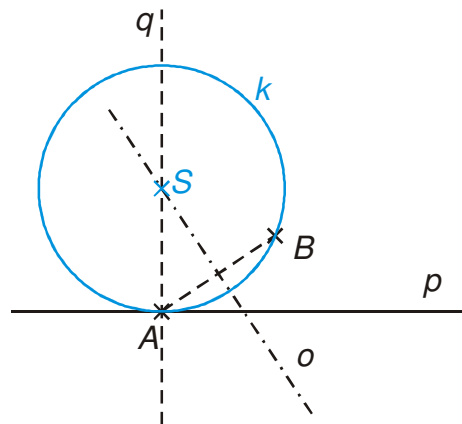
Náčrtek:



Střed hledané kružnice:

- Musí ležet na kolmici k přímce procházející bodem A .
- Musí být stejně vzdálen od obou bodů \Rightarrow leží ose úsečky AB .

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

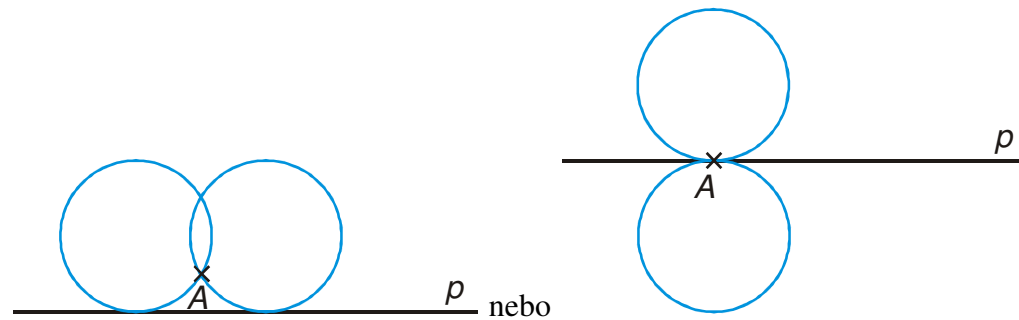
1. $p, A, B; A \in p, B \notin p$
2. $q; q \perp p, A \in q$
3. $o; o_{AB}$
4. $S; S = q \cap o$
5. $k; k(S; |AS|)$

Rozbor: Pokud bod B neleží na přímce p má úloha má vždy jedno řešení.

Předchozí příklad je opět Apollóniova úloha, speciální případ, kdy bod leží buď na přímce (podmínka (pB)) nebo na kružnici (podmínka (pk)). Tyto úlohy se nazývají **Pappovy**. Předchozí příklad se označuje jako Pappova úloha $(pB)B$.

Př. 5: Je dána přímka p a bod A . Narýsuj všechny kružnice, které se dotýkají přímky p , procházejí bodem A a mají poloměr $r = 3\text{ cm}$.

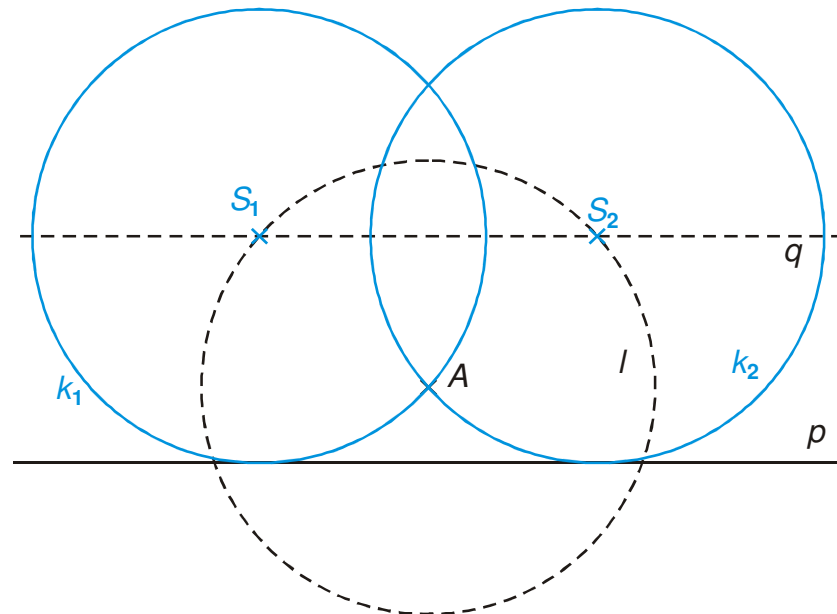
Náčrtek:



Střed hledané kružnice:

- Musí být od přímky p vzdálen 3 cm \Rightarrow musí ležet na rovnoběžce s přímkou p vzdálenou 3 cm.
- Musí být od bodu A vzdálen 3 cm \Rightarrow leží na kružnici $l(A, 3\text{ cm})$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. p, A
2. $q; q \parallel p, |pq| = 3\text{ cm}$
3. $l; l(A; 3\text{ cm})$
4. $S_1, S_2; S_1, S_2 = q \cap l$
5. $k_1, k_2; k_1(S_1; 3\text{ cm}), k_2(S_2; 3\text{ cm})$

Rozbor: Počet řešení závisí na vzdálenosti bodu A od přímky p .

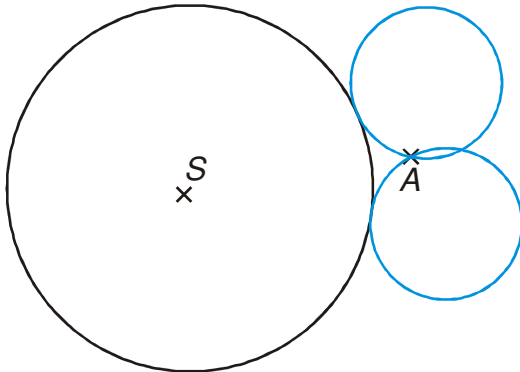
$|pA| < 6\text{ cm} \Rightarrow$ úloha má dvě řešení,

$|pA| = 6\text{ cm} \Rightarrow$ úloha má jedno řešení,

$|pA| > 6\text{ cm} \Rightarrow$ úloha nemá žádné řešení.

Př. 6: Je dána kružnice $k(S; 4,5 \text{ cm})$ a bod A . Najdi všechny kružnice o , které procházejí bodem A , dotýkají se kružnice k a mají poloměr $r = 2 \text{ cm}$. Proved' diskusi v závislosti vzdálenosti bodu A od středu kružnice k .

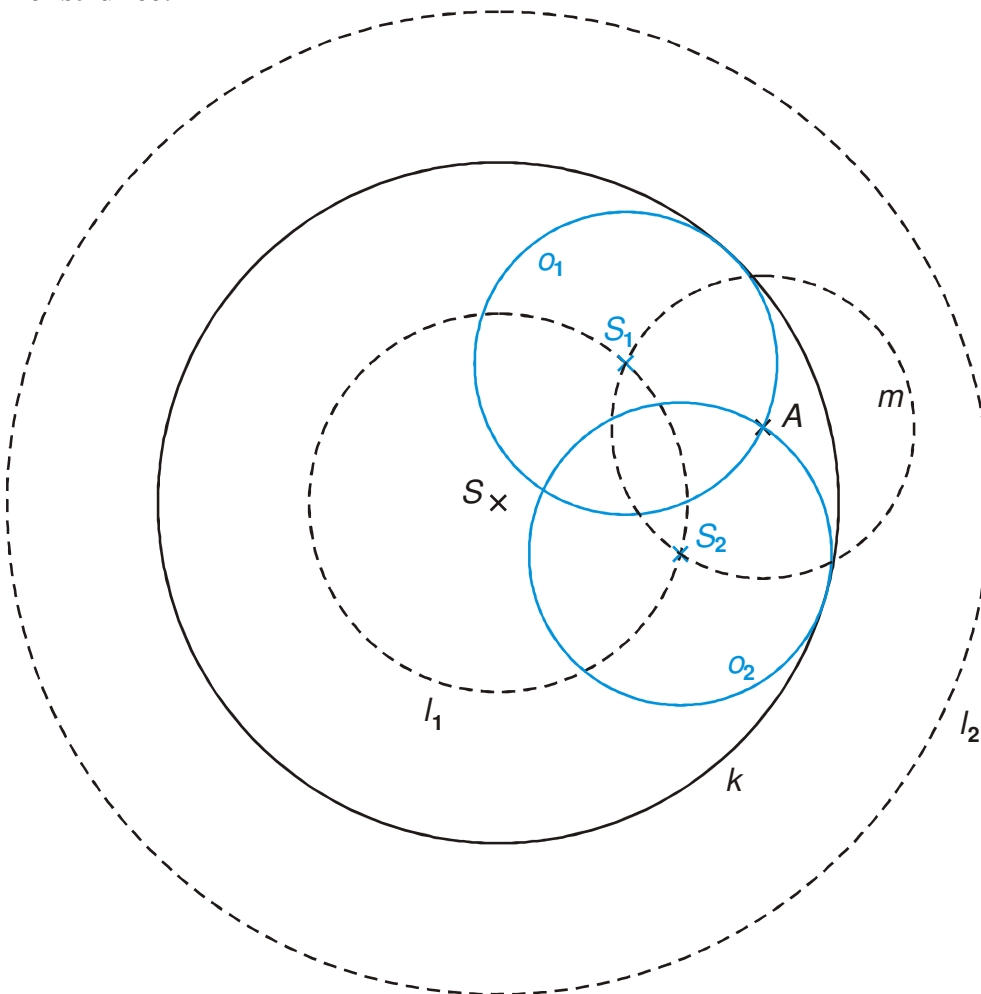
Náčrtek:



Střed hledané kružnice:

- Musí být od kružnice k vzdálen 2 cm \Rightarrow musí ležet na kružnici $l_1(S; 2,5 \text{ cm})$ (vnitřní dotyk) nebo na kružnici $l_2(S; 6,5 \text{ cm})$.
- Musí být od bodu A vzdálen 2 cm \Rightarrow leží na kružnici $m(A, 2 \text{ cm})$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $k(S, 4,5 \text{ cm}), A$

2. $l_1, l_2; l_1(S; 2,5 \text{ cm}), l_2(S; 6,5 \text{ cm})$

3. $m; m(A; 2 \text{ cm})$

4. $S_1, S_2; S_1, S_2 = (l_1 \cup l_2) \cap m$

5. $o_1, o_2; o_1(S_1; 2 \text{ cm}), o_2(S_2; 2 \text{ cm})$

Rozbor: Počet řešení závisí na vzdálenosti bodu A od středu S .

$|AS| < 0,5 \text{ cm} \Rightarrow$ úloha nemá žádné řešení,

$|AS| = 0,5 \text{ cm} \Rightarrow$ úloha má právě jedno řešení,

$0,5 < |AS| < 6,5 \text{ cm} \Rightarrow$ úloha má dvě řešení,

$|AS| = 6,5 \text{ cm} \Rightarrow$ úloha má právě jedno řešení,

$|AS| > 6,5 \text{ cm} \Rightarrow$ úloha nemá žádné řešení.

Př. 7: Petáková:

strana 76/cvičení 8 a)

strana 76/cvičení 11 a)

strana 77/cvičení 12

strana 77/cvičení 13

Shrnutí: Při hledání středů kružnic využíváme množiny bodů, na kterých musí střed ležet.